جلسه شانزدهم

دوشنبه، ۲۶ آبان ۱۴۰۴

* سری های فوریه

هدف: یافتن جوابی برای ODE خطی با ضرایب ثابت $p(D)x = f(t)$ که در آن تابع ورودی $f(t)$ یک تابع دلخواه تناوبی است.

* کاربرد سری های فوریه در حل معادلات دیفرانسیل: اگر تابع ورودی $f(t)$ دارای دوره تناوب $T>0$ باشد. (یعنی $\forall t \; f(t+T) = f(t)$) آنگاه خواهیم دید که می‌توان $f(t)$ را به صورت مجموعی نامتناهی برحسب توابع sin و cos نوشت که دوره تناوب همگی این توابع نیز برابر T است. این سری را "سری فوریه" تابع $f(t)$ می نامیم. در این صورت با استفاده از سری فوریه تابع ورودی $p(D)x = f(t)$ و به کارگیری اصل سوپرپوزیشن می‌توانیم جوابی برای این معادله ناهمگن بیابیم.

* قضیه (فوریه): فرض کنیم $f(t)$ تابعی تناوبی با دوره تناوب $T = 2\pi$ باشد در این صورت سری فوریه $f(t)$ عبارتست از:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + \dots + b_1 \sin t + b_2 \sin(2t) + \dots$$

$$\Longrightarrow \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right) \qquad (1)$$

که در آن «ضرایب فوریه» (یعنی a_i ها و b_j ها) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(۲)\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\[2ex] a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \end{cases} \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots$$

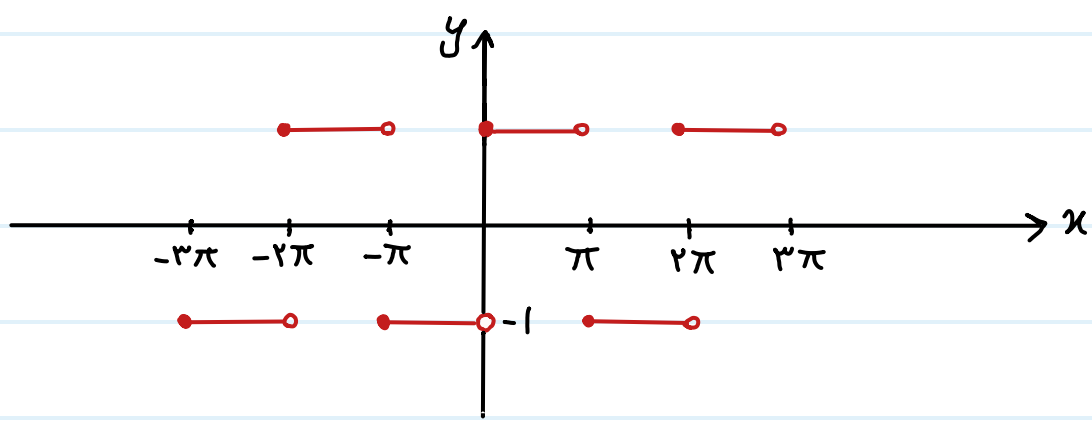
اثبات: بعد از تعریف مفهوم «توابع متعامد»

تذکر: خواهیم دید که می‌توان قضیه فوریه را برای توابع تناوبی با دوره تناوب دلخواه نیز تعمیم داد.

مثال (تابع موج مربعی): فرض کنیم $f(t)$ تابعی با دوره تناوب ۲π باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi \leqslant t \leqslant ۰ \\[2ex] 1 & ; \quad ۰ \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

در این صورت قصد داریم سری فوریه تابع $f(t)$ را بیابیم.



(تابع فرد)

می دانیم سری فوریه $f(t)$ عبارتست از : $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)$

که در آن داریم :

$$\forall n\geqslant 1 \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nt)\,dt+\int_{0}^{\pi}(+1)\cos(nt)\,dt\right)$$

$$=-\frac{\sin(nt)}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin(nt)}{n\pi}\Big|_{0}^{\pi}=0+0=0$$

$$n=0 \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \underset{\text{تابع فرد}}{=} 0$$

به طور مشابه :

$$\forall n\geqslant 1 \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\sin(nt)\,dt+\int_{0}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right)$$

$$=\frac{\cos(nt)}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos(nt)}{n\pi}\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1-\cos(-n\pi)}{n\pi}-\frac{\cos(n\pi)-1}{n\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\underbrace{\cos(n\pi)}_{\substack{+1=\text{زوج } n\\ -1=\text{فرد } n}}\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0 & ; \quad \text{زوج } n\\ \frac{4}{n\pi} & ; \quad \text{فرد } n\end{cases}$$

لذا سری فوریه $f(t)$ عبارتست از:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)=\frac{4}{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}+\dots\right)$$

* نکته: اگر $f(t)$ تابعی فرد با دوره تناوب 2π باشد، آنگاه سری فوریه تابع $f(t)$ به صورت زیر است:

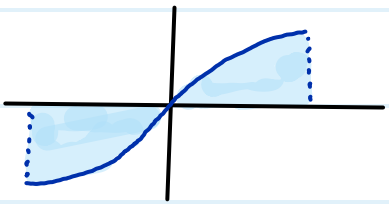
$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

و اگر $f(t)$ تابعی زوج با دوره تناوب 2π باشد، آنگاه سری فوریه $f(t)$ عبارتست از:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

دلیل درستی نکته آخر: فرض کنیم $f(t)$ تابعی فرد باشد:

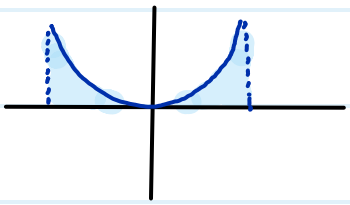
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=0$$



(تابع فرد)

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{فرد}}\,\underbrace{\cos(nt)}_{\text{زوج}}}_{\text{فرد}}\,dt=0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{فرد}}\,\underbrace{\sin(nt)}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$



(تابع زوج)

* سری فوریه توابعی با دوره تناوب دلخواه $T=2L$: $(L\in\mathbb{R}^+)$ ($L=\frac{T}{2}$ را نیم دوره تناوب تابع $f(t)$ می نامیم.)

فرض کنیم $f(t)$ تابعی تناوبی با دوره تناوب دلخواه $T=2L>0$ باشد. در این صورت از آنجا که با تغییر متغیری ساده می توانیم بازه $(-L,L)$ را به بازه $(-\pi,\pi)$ تبدیل کرد:

$$(-L,L)\ni t \longmapsto \frac{\pi t}{L}\in(-\pi,\pi)$$

لذا خواهیم دید که سری فوریه تابع $f(t)$ عبارتست از:

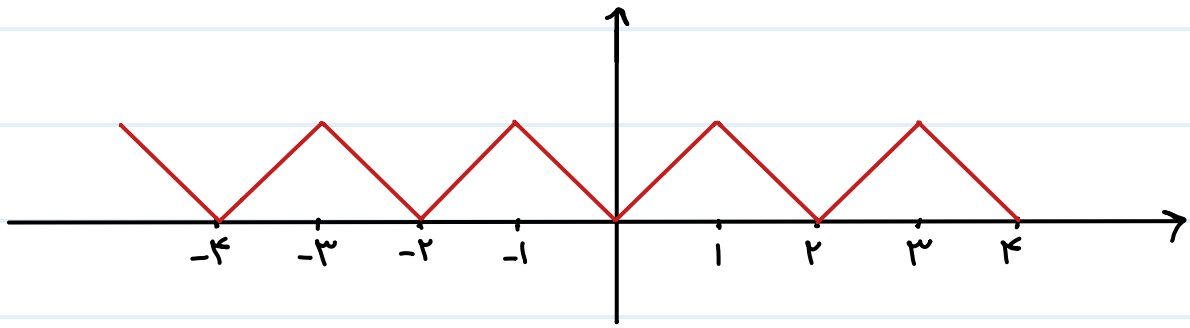
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)$$

که ضرایب فوریه عبارتند از:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

$$,\ \forall n\in\mathbb{N}\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

مثال (تابع موج مثلثی): فرض کنیم $f(t)$ تابعی با دوره تناوب $T=2$ روی بازه $[-1,1)$ با ضابطه $f(t)=|t|$ باشد.



چون $T=2$ لذا دوره تناوب تابع $f(t)=|t|$ برابر است با $L=1$. لذا

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n\pi}{L} = n\pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{|t|}_{\text{زوج}} \underbrace{\cos(n\pi t)}_{\text{زوج}}}_{\text{زوج}} \, dt = 2 \int_{0}^{1} t\cos(n\pi t)\, dt$$

لذا با استفاده از تکنیک انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$u = t \longrightarrow du = dt$$

$$dv = \cos(n\pi t)\, dt \longrightarrow v = \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}$$

$$\int u\, dv = u.v - \int v.\, du$$

$$\Longrightarrow 2\left(\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 2\left(\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi)^2}\right) = \frac{2}{(n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(n\pi)^2} & : n \text{ فرد} \\ 0 & : n \text{ زوج} \end{cases}$$

و برای $n=0$ داریم:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} \underbrace{|t|}_{\text{زوج}}\, dt = 2 \int_{0}^{1} t\, dt = t^2 \Big|_0^1 = 1$$

از آنجا که تابع $f(t)=|t|$ تابعی زوج است لذا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = 0$

بنابراین سری فوریه تابع $f(t)$ عبارتست از:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi t) + \frac{\cos(3\pi t)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi t)}{5^2} + \cdots\right)$$